

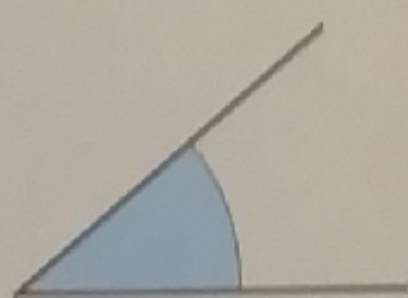
Proszę rozwiązać zadania ze zdjęć do 24 kwietnia. Rozwiązania zadań (również z poprzednich lekcji) proszę też przesłać do 24 kwietnia na adres e-mail kupkaandrzej@radymno.edu.pl w następnym tygodniu wszystkie rozwiązane zadania będą ocenione.

KĄTY – POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI

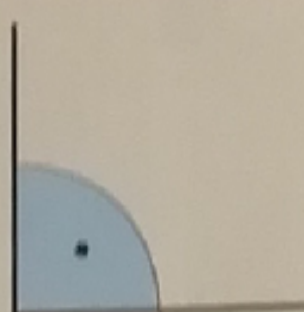
Kątem nazywamy każdy z dwóch obszarów powstałych w wyniku rozcięcia płaszczyzny dwiema półprostymi o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi. Półproste te nazywamy **ramionami kąta**, wspólny ich początek a **wierzchołkiem kąta**.

Do mierzenia kątów służy kątomierz. Jednostką miary kąta jest stopień (1°).

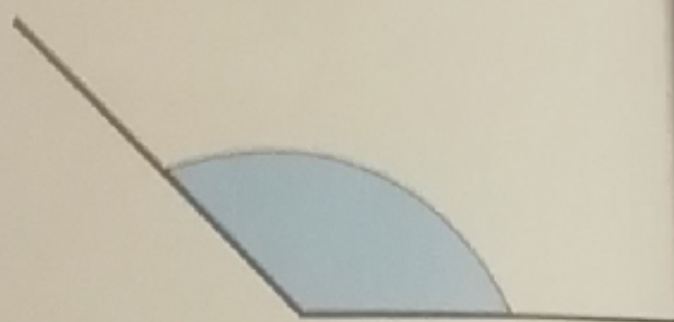
Wyróżniamy:



Kąt ostry ma miarę mniejszą niż 90° .



Kąt prosty ma miarę 90° .

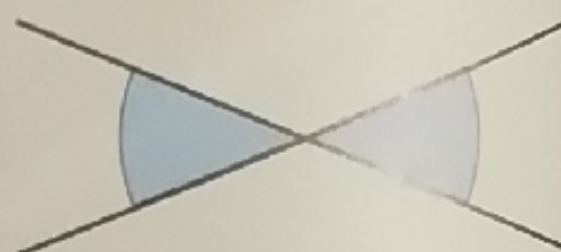


Kąt rozwarty ma miarę większą niż 90° i mniejszą niż 180° .

Kąt o mierze 0° nazywamy kątem **zerowym**, kąt o mierze 180° nazywamy kątem **półpełnym**, kąt o mierze równej 360° nazywamy kątem **pełnym** (zarówno w kącie o mierze 360° , jak i w kącie o mierze 0° ramiona kąta się pokrywają).

Kąty oznaczone na rysunku obok kolorem niebieskim to **kąty wierzchołkowe**. Ich miary są równe.

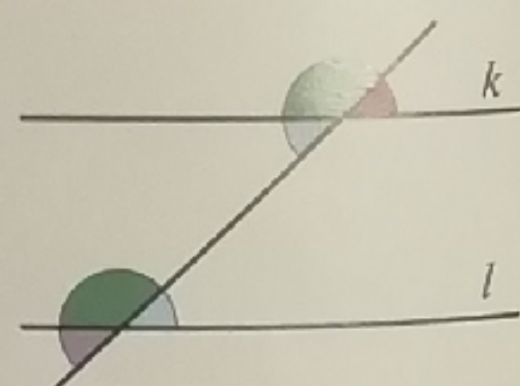
Zauważmy, że dwie przecinające się proste tworzą dwie pary kątów wierzchołkowych.



Na rysunku obok przedstawiono dwie proste równoległe k i l przecięte trzecią prostą. Kąty oznaczone kolorem niebieskim to **kąty naprzemianległe wewnętrzne**. Ich miary są równe.

Kąty oznaczone kolorem fioletowym to **kąty naprzemianległe zewnętrzne**. Ich miary są równe.

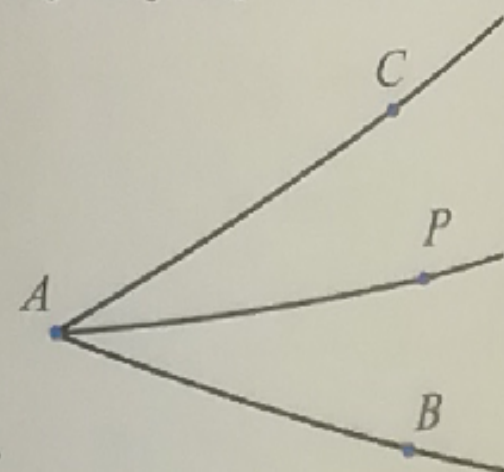
Kąty oznaczone kolorem zielonym to **kąty odpowiadające**. Ich miary są równe.



Zauważmy, że przecinając dwie proste równoległe trzecią prostą, uzyskujemy cztery pary kątów naprzemianległych i cztery pary kątów odpowiadających.

Jeśli półprosta AP dzieli kąt BAC na kąty o równych miarach (patrz rysunek obok), to nazywamy ją **dwusieczną** tego kąta.

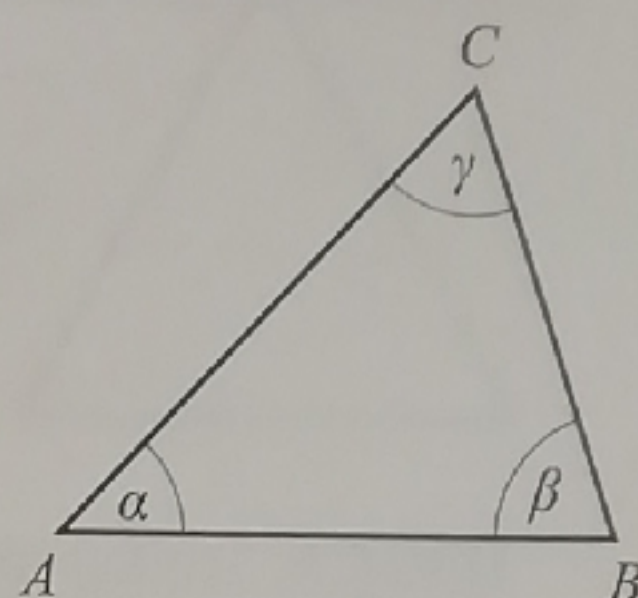
Każdy z kątów PAC i BAP ma miarę równą połowie miary kąta CAB .



w trójkącie

Miary kątów często oznaczamy literami alfabetu greckiego, np. α (alfa), β (beta) i γ (gamma). Przypomnijmy twierdzenie poznane w gimnazjum:

Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180° :
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że trójkąt może mieć nie więcej niż jeden kąt:

a) prosty,

b) rozwarty.

PRZYKŁAD 1

Dany jest trójkąt o kątach α , β i γ gdzie $\alpha = 48^\circ$, $\beta = 62^\circ$. Oblicz miarę kąta γ . Korzystamy z twierdzenia o kątach w trójkącie:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\text{Zatem } \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (48^\circ + 62^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

Ćwiczenie 2

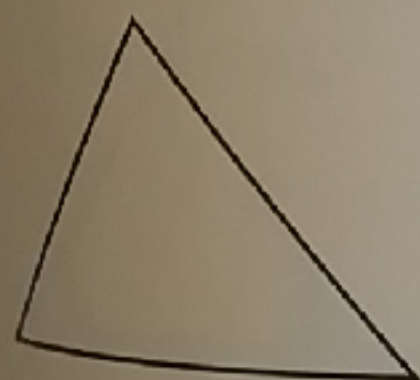
Kąty trójkąta mają miary α , β i γ . Mając dane miary dwóch spośród tych kątów, oblicz miarę trzeciego kąta trójkąta.

a) $\alpha = 66^\circ$, $\beta = 30^\circ$

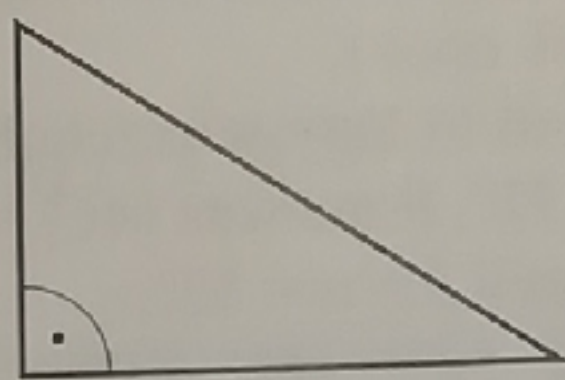
b) $\alpha = 52^\circ$, $\gamma = 104^\circ$

c) $\beta = 27^\circ$, $\gamma = 16^\circ$

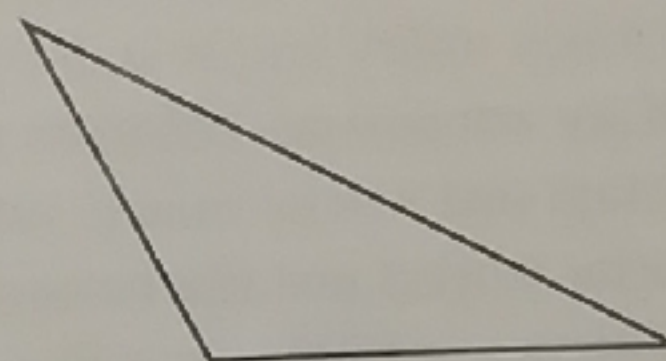
Trójkąty ze względu na ich kąty dzielimy na ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne.



Trójkąt ostrokątny ma wszystkie kąty ostre.



Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty.



Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty.

Ćwiczenie 3

Mając dane miary dwóch kątów trójkąta α i β , oblicz miarę trzeciego kąta. Określ, czy jest to trójkąt ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.

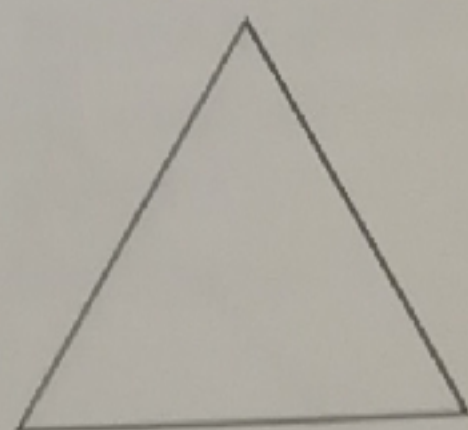
a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 29^\circ$

b) $\alpha = 59^\circ$, $\beta = 39^\circ$

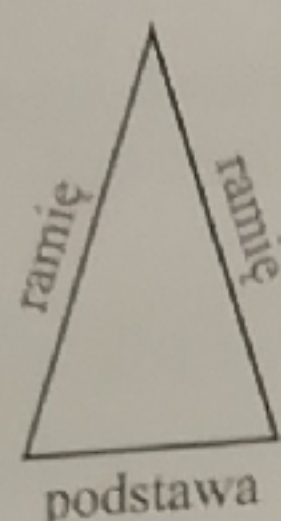
c) $\alpha = 18^\circ$, $\beta = 72^\circ$

Ze względu na długości boków trójkąty dzielimy na:

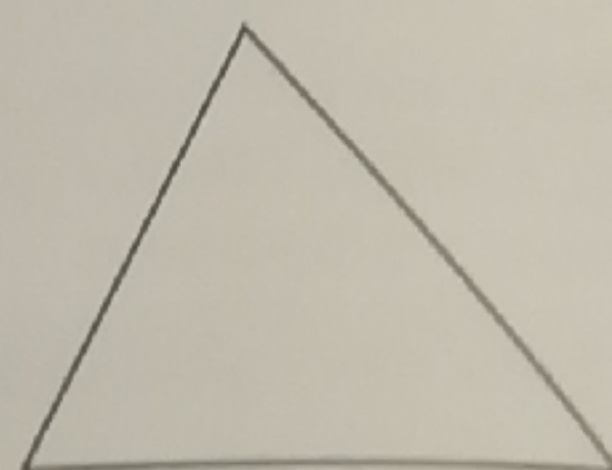
Równoboczne
o wszystkich bokach
tej samej długości.



Równoramienne
o co najmniej dwóch
bokach równej długości.



Różnoboczne
o wszystkich bokach
różnej długości.



UWAGA. Trójkąt równoboczny jest trójkątem równoramiennym.
W trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe – mają po 60° .
W trójkącie równoramiennym równe są kąty przy jego podstawie.

PRZYKŁAD 2

Dany jest trójkąt równoramienny, w którym kąt między ramionami ma miarę 30° . Oblicz miary kątów przy podstawie w tym trójkącie.

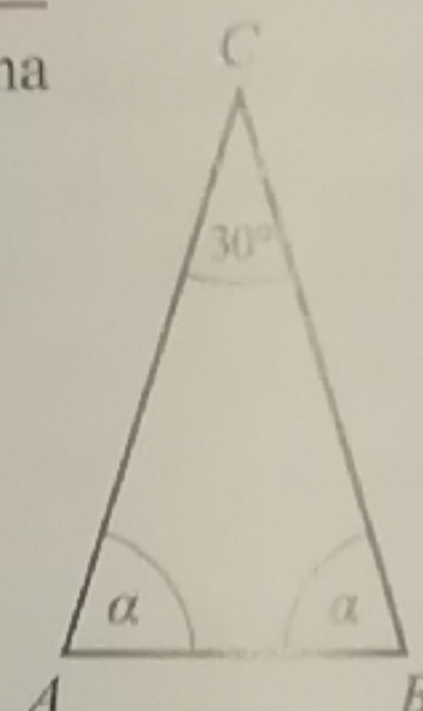
Oznaczmy przez α kąt przy podstawie tego trójkąta.

$$\text{Mamy: } 2\alpha + 30^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 150^\circ$$

$$\alpha = 75^\circ$$

Każdy kąt przy podstawie tego trójkąta ma miarę 75° .



Ćwiczenie 4

Trójkąt ABC jest równoramienny, w którym $|AC| = |BC|$. Oblicz miary:

- kątów przy podstawie tego trójkąta, jeśli $\angle ACB$ ma miarę 130° ,
- pozostałych kątów tego trójkąta, jeśli $\angle BAC$ ma miarę 37° .

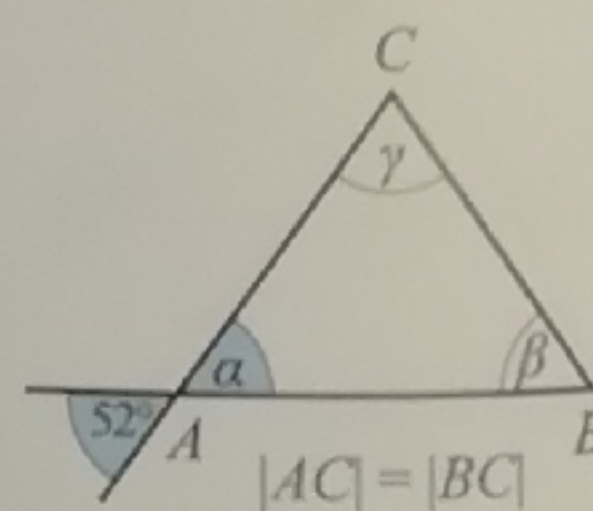
PRZYKŁAD 3

Oblicz miary kątów α , β i γ (rysunek obok).

Kąty oznaczone kolorem niebieskim to kąty wierzchołkowe. Mają one równe miary, zatem $\alpha = 52^\circ$. Ponieważ $|AC| = |BC|$,

więc trójkąt jest równoramienny, czyli $\beta = \alpha = 52^\circ$.

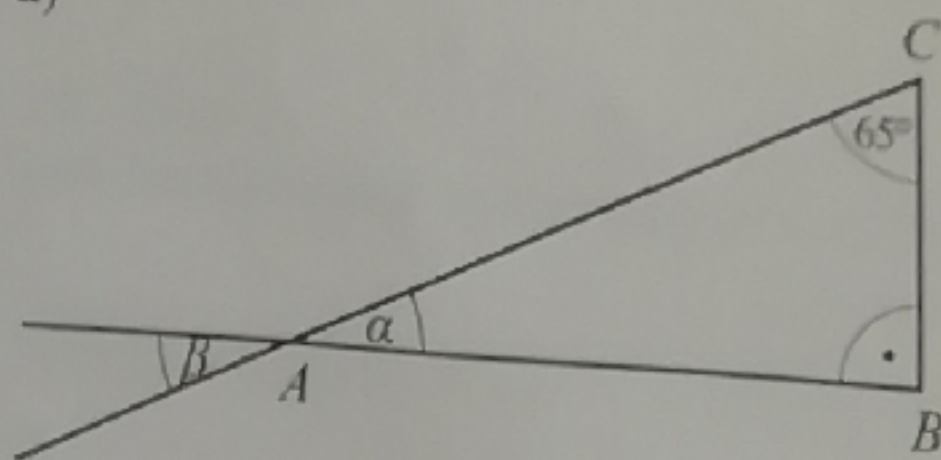
Zatem $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 2 \cdot 52^\circ = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$.



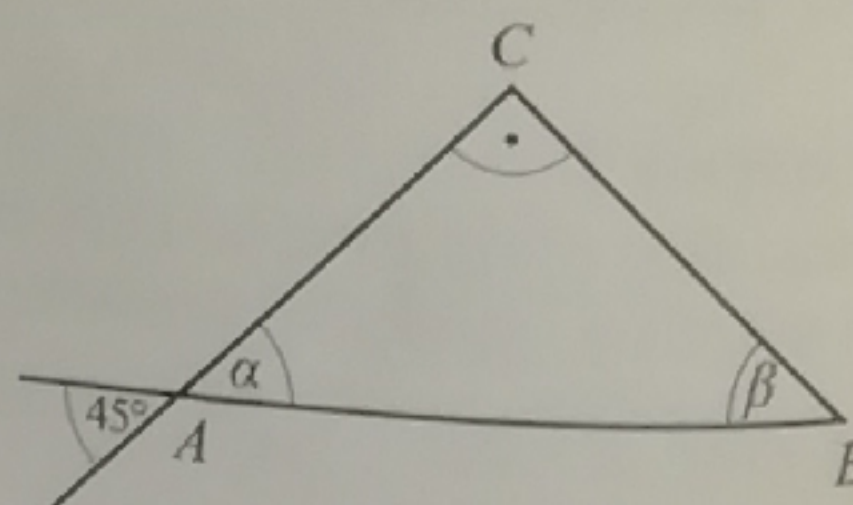
Ćwiczenie 5

Oblicz miary kątów α i β .

a)



b)



PRZYKŁAD 4

Oblicz miary kątów α i β , wiedząc, że proste k i l są równoległe (rysunek obok).

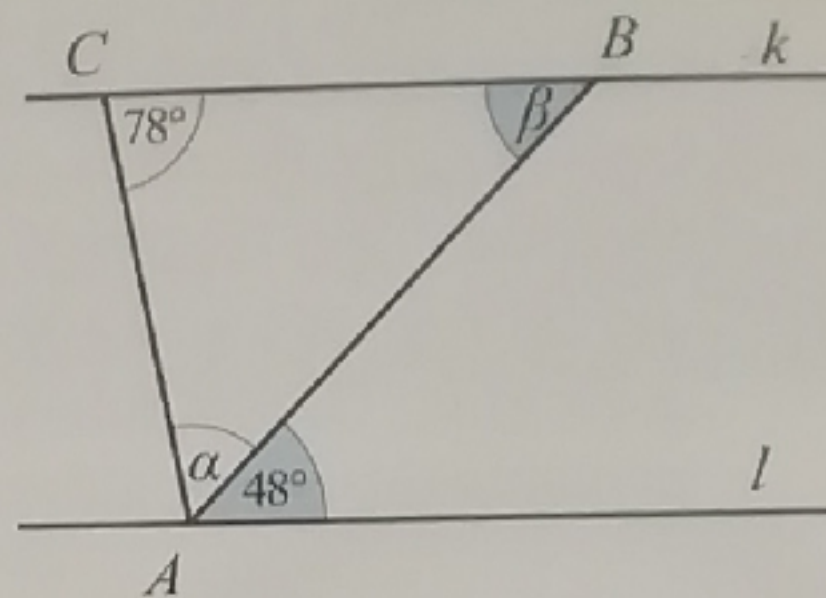
Proste k i l są równoległe. Zatem kąty oznaczone kolorem niebieskim to kąty naprzemianległe – ich miary są równe.

Stąd $\beta = 48^\circ$.

Miarę kąta α obliczamy, korzystając z tego, że:

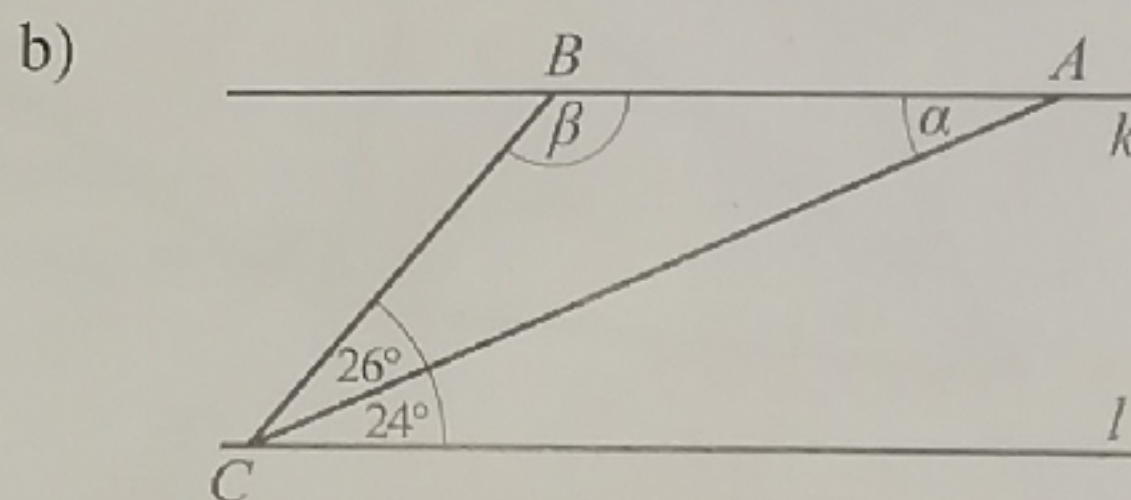
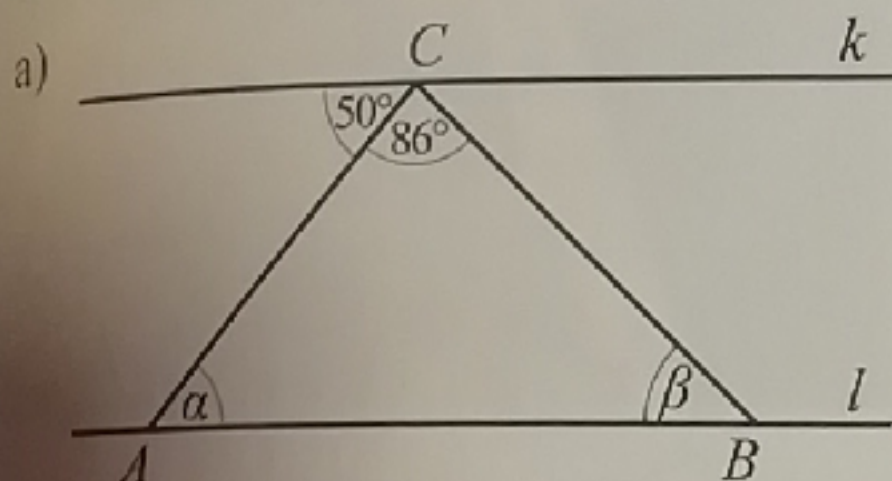
$$\alpha + \beta + 78^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{Zatem } \alpha = 180^\circ - (\beta + 78^\circ) = 180^\circ - (48^\circ + 78^\circ) = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ.$$



Ćwiczenie 6

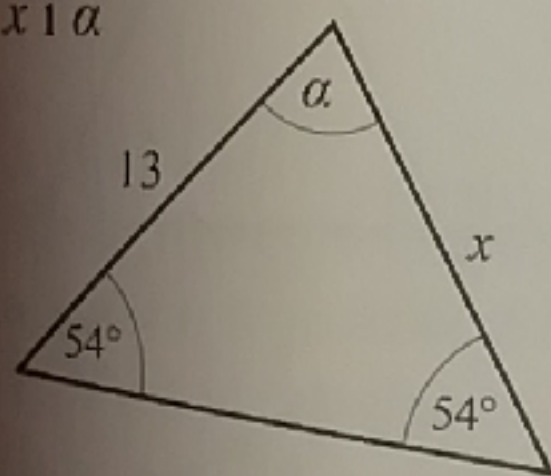
Oblicz miary kątów α i β , wiedząc, że proste k i l są równoległe.



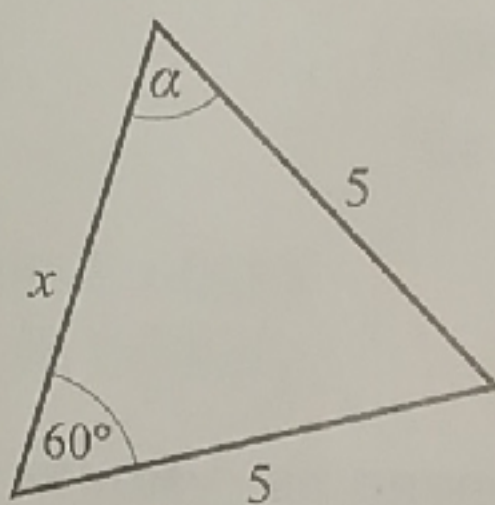
ZADANIA

1. Oblicz niewiadome wielkości.

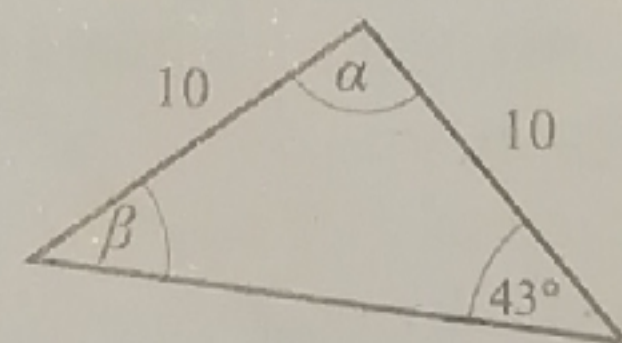
a) x i α



b) x i α



c) α i β



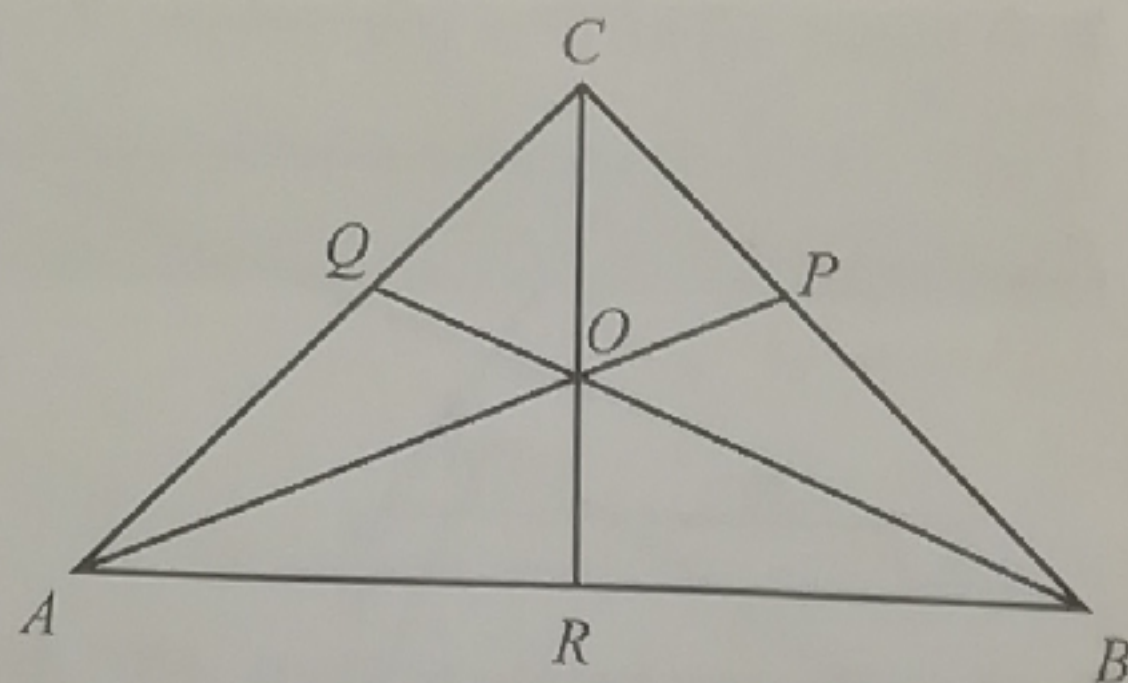
2. Dany jest trójkąt o kątach α , β i γ . Oblicz miary tych kątów, wiedząc, że stosunek ich miar jest jak:

a) $1 : 2 : 3$,

b) $1 : 3 : 5$,

c) $2 : 3 : 7$.

3. Dwusieczne kątów trójkąta prostokątnego równoramiennego dzielą go na sześć mniejszych trójkątów (rysunek obok). Oblicz miary kątów tych trójkątów (przypomnijmy, że dwusieczne kątów w dowolnym trójkącie przecinają się w jednym punkcie).



$$|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$$